Акустика, радиотехника, оптика и другие разделы науки и техники базируются на учении о колебаниях и волнах. Большую роль играет теория колебаний в механике, в особенности в расчетах на прочность летательных аппаратов, мостов, отдельных видов машин и узлов.

*Периодическим колебанием* называется процесс, при котором система (например, механическая) возвращается в одно и то же состояние через определенный промежуток времени. Этот промежуток времени называется периодом колебаний.

*Возвращающая сила* - сила, под действием которой происходит колебательный процесс. Эта сила стремится тело или материальную точку, отклоненную от положения покоя, вернуть в исходное положение.

В зависимости от характера воздействия на колеблющееся тело различают свободные (или собственные) колебания и вынужденные колебания.

*Свободные колебания* имеют место тогда, когда на колеблющееся тело действует только возвращающая сила. В том случае, если не происходит рассеивания энергии, свободные колебания являются незатухающими. Однако, реальные колебательные процессы являются затухающими, т.к. на колеблющееся тело действуют силы сопротивления движению (в основном силы трения).

*Вынужденные колебания* совершаются под действием внешней периодически изменяющейся силы, которую называют вынуждающей. Во многих случаях системы совершают колебания, которые можно считать гармоническими.

*Гармоническими колебаниями* называют такие колебательные движения, при которых смещение тела от положения равновесия совершается по закону синуса или косинуса:

X=Asin(wt+ф0) или x=Acos(wt+ф0) (w круглая, ф0-фи нулевое)

*Периодом Т* называется время одного полного колебания. По истечению времени Т повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания. За один период колеблющаяся точка проходит путь, численно равный четырем амплитудам.

*Угловая скорость* определяется из условия, что за период Т радиус ОК сделает один оборот, т.е. повернется на угол 2π радиан:

W=(2П)/T или Т=(2П)/w

*Частота колебаний* - число колебаний точки в одну секунду, т.е. частота колебаний определяется как величина, обратная периоду колебаний:

V=1/T или w=2ПV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В случае упругих колебаний возвращающая сила F = -kx. Если нет других сил, кроме упругой силы, то колебания называют свободными. Согласно второму закону Ньютона

ma=∑(сверху n,снизу i=0) Fi=Fупр=-kx или m\*(((d^2)\*x)/(dt^2))+kx=0.  
Разделим оба слагаемых на m:

((d^2)x)/(dt^2))+(k/m)\*x=0

Последнее соотношение носит название основного уравнения гармонических свободных колебаний. Общее решение этого уравнения имеет вид

X=Asin(√((k/m)\*t)+ф0) (ф0-фи 0)

в чем легко убедиться подстановкой х в исходное дифференциальное уравнение.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ.

Все реальные колебательные системы являются диссипативными. Энергия механических колебаний такой системы постепенно расходуется на работу против сил трения, поэтому свободные колебания всегда затухают - их амплитуда постепенно уменьшается. Во многих случаях, когда отсутствует сухое трение, в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях движения силы, вызывающие затухание механических колебаниях, пропорциональны скорости. Эти силы, независимо от их происхождения, называют силами сопротивления.

Fсопр=-r\*v,

где r - коэффициент сопротивления, v - скорость движения. Запишем второй закон Ньютона для затухающих колебаний тела вдоль оси ОХ ma=-k\*x-r\*v,

или

m\*((d^2)\*x)/(dt^2)+r\*((dx)/(dt))+kx=0

Перепишем это уравнение в следующем виде: (((d^2)\*x)/(d\*t^2))+(r/m)\*((dx)/(dt))+(k/m)\*x=0,

и обозначим:r/m=2**β;k/m=w0^2 (w0- w круглая, 0 снизу, 2 в квадрате)**

где w0^2  представляет ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т.е. при r = 0. Эту частоту называют собственной частотой колебания системы; β - коэффициент затухания. Тогда

((d^2)\*x)/(dt^2))+2**β\*(dx/dt)+w0^2=0**

Будем искать решение уравнения в виде  
x=(e^(-**βt))\*U**  
где U - некоторая функция от t.

Продифференцируем два раза это выражение по времени t и, подставив значения первой и второй производных в уравнение, получим (((d^2)\*U)/(dt^2))+((w0^2)- **β^2)\*U=0**

Решение этого, уравнения существенным образом зависит от знака коэффициента, стоящего при U. Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положительный. Введем обозначение (w0^2)- **β^2=w^2** тогда С вещественным ω решением этого уравнения, как мы знаем, является функция U=A0sin(wt+ф0)

Таким образом, в случае малого сопротивления среды ((**β^2)<(w0^2))**  , решением уравнения будет функция

X=A0^(-**βt)\*sin(wt+ф0)**

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ.**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК.

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, совершающая колебательное движение в одной вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

Таким маятником можно считать тяжелый шар массой m, подвешенный на тонкой нити, длина l которой намного больше размеров шара. Если его отклонить на угол α (рис.7.3.) от вертикальной линии, то под влиянием силы F – одной из составляющих веса Р он будет совершать колебания. Другая составляющая F’ , направленная вдоль нити, не учитывается, т.к. уравновешивается силой натяжения нити. При малых углах смещения sin **α**≅ **α (**≅ это конгруэнтность(геометрическое равенство))  и, тогда координату х можно отсчитывать по горизонтальному направлению. Из рис.7.3 видно, что составляющая веса, перпендикулярная нити, равна

F=-m\*g\*sin **α**

Знак минус в правой части означает то, что сила F направлена в сторону уменьшения угла α. С учетом малости угла α

F=-m\*g\* **α**

Для вывода закона движения математического и физического маятников используем основное уравнение динамики вращательного движения

Момент силы относительно точки О:M=lF (l-маленькая эль) , и момент инерции:  
*M = FL* .  
Момент инерции *J* в данном случае  
Угловое ускорение:  
E=((d^2) **α** )/(dt^2) (E- скругленная)

С учетом этих величин имеем:  
-m\*g\* **α** \*l=m\*(**l^2)\*(((d^2)\* α** )/(dt^2)) или (((d^2)\* **α)/dt^2))+(g/l)\* α=0** Его решение  
**α** =Asin(√ ((g/l)\*t)+ф0, где w= √(g/l) и T=2П √(l/g) Как видим, период колебаний математического маятника зависит от его длины и ускорения силы тяжести и не зависит от амплитуды колебаний.

ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК.

Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной ocи (оси подвеса), не проходящей через центр тяжести, и совершающее колебания относительно этой оси под действием силы тяжести. В отличие от математического маятника массу такого тела нельзя считать точечной.

При небольших углах отклонения α (рис. 7.4) физический маятник так же совершает гармонические колебания. Будем считать, что вес физического маятника приложен к его центру тяжести в точке С. Силой, которая возвращает маятник в положение равновесия, в данном случае будет составляющая силы тяжести – сила F.

F=-m\*g\*sin **α**

Знак минус в правой части означает то, что сила F направлена в сторону уменьшения угла α. С учетом малости угла α

F=-m\*g\* **α**

Для вывода закона движения математического и физического маятников используем основное уравнение динамики вращательного движения

J=ml^2 . Момент силы: определить в явном виде нельзя. С учетом всех величин, входящих в исходное дифференциальное уравнение колебаний физического маятника имеет вид:

(((d^2)\* **α)/(dt^2))+((m\*g\*L)/J)\* α=0**

**W=** √((m\*g\*L)/J); T=2П √(J/(m\*g\*L))

Решение этого уравнения  
**α=Asin(**√(((m\*g\*L)/J)\*t)+ф0)

Определим длину l математического маятника, при которой период его колебаний равен периоду колебаний физического маятника, т.е.Tмат=Тфиз http://physics-lectures.ru/lectures/82/images/image133.gif или

2П√(l/g)=2П√(J/(m\*g\*L)).  
Из этого соотношения определяем  
l=J/(m\*L)

Данная формула определяет приведенную длину физического маятника, т.е. длину такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

ДОБРОТНОСТЬ

**Добро́тность** — параметр [колебательной системы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0), определяющий ширину [резонанса](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B5%D0%B7%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BD%D1%81) и характеризующий, во сколько раз запасы энергии в системе больше, чем потери энергии за один период колебаний.

Добротность обратно пропорциональна скорости затухания собственных колебаний в системе. То есть, чем выше добротность колебательной системы, тем меньше потери энергии за каждый период и тем медленнее затухают колебания.

Q=(2Пf0W)/Pd (f0- f нулевое, d снизу). f0- резонансная частота колебаний. W- энергия, запасенная в колебательной системе. Pd- рассеиваемая мощность.

РЕЗОНАНС.

**Резона́нс** ([фр.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%86%D1%83%D0%B7%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) *resonance*, от [лат.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) *resono* «откликаюсь») — явление резкого возрастания [амплитуды](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B8%D1%82%D1%83%D0%B4%D0%B0) [вынужденных колебаний](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D0%BD%D1%83%D0%B6%D0%B4%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F), которое наступает при совпадении[частоты](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%82%D0%B0) внешнего воздействия с некоторыми значениями (**резонансными частотами**), определяемым свойствами системы. Увеличение амплитуды — это лишь следствие резонанса, а причина — совпадение внешней (возбуждающей) частоты с некоторой другой частотой, определяемой из параметров [колебательной системы](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0), таких как [внутренняя (собственная)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%BE%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) частота, коэффициент вязкости и т.п. Обычно резонансная частота не сильно отличается от собственной нормальной, но далеко не во всех случаях можно говорить об их совпадении.

В результате резонанса, при некоторой частоте вынуждающей силы колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие этой силы. Степень отзывчивости в теории колебаний описывается величиной, называемой [добротность](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C). При помощи резонанса можно выделить и/или усилить даже весьма слабые периодические колебания.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ДЕКРЕМЕНТ ЗАТУХАНИЯ.

**Логарифмический декремент колебаний** — безразмерная [физическая величина](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D0%BB%D0%B8%D1%87%D0%B8%D0%BD%D0%B0), описывающая уменьшение [амплитуды](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B8%D1%82%D1%83%D0%B4%D0%B0) [колебательного процесса](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) и равная [натуральному логарифму](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC) отношения двух последовательных [амплитуд](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B8%D1%82%D1%83%D0%B4%D0%B0) колеблющейся величины в одну и ту же сторону:

**Λ=ln(x0/x1),**

Логарифмический декремент колебаний равен коэффициенту затухания, умноженному на период колебаний:

**Λ=βT**

ФИГУРЫ ЛИССАЖУ(рисунок в папке)

**Фигу́ры Лиссажу́** — [замкнутые траектории](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%BC%D0%BA%D0%BD%D1%83%D1%82%D0%B0%D1%8F_%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%B5%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F), прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два [гармонических колебания](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B0%D1%80%D0%BC%D0%BE%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%8F) в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Впервые изучены французским учёным [Жюлем Антуаном Лиссажу](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B8%D1%81%D1%81%D0%B0%D0%B6%D1%83,_%D0%96%D1%8E%D0%BB%D1%8C_%D0%90%D0%BD%D1%82%D1%83%D0%B0%D0%BD" \o "Лиссажу, Жюль Антуан). Вид фигур зависит от соотношения между [периодами](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BE%D0%B4_%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B5%D0%B1%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9) ([частотами](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%82%D0%B0_%D0%BF%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%86%D0%B5%D1%81%D1%81%D0%B0)), фазами и[амплитудами](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BC%D0%BF%D0%BB%D0%B8%D1%82%D1%83%D0%B4%D0%B0) обоих колебаний. В простейшем случае равенства обоих периодов фигуры представляют собой эллипсы, которые при разности фаз 0 или П вырождаются в отрезки прямых, а при разности фаз П/2  и равенстве амплитуд превращаются в окружность. Если периоды обоих колебаний неточно совпадают, то разность фаз всё время меняется, вследствие чего эллипс всё время деформируется. При существенно различных периодах фигуры Лиссажу не наблюдаются. Однако, если периоды относятся как целые числа, то через промежуток времени, равный наименьшему кратному обоих периодов, движущаяся точка снова возвращается в то же положение — получаются фигуры Лиссажу более сложной формы. Фигуры Лиссажу вписываются в прямоугольник, центр которого совпадает с началом [координат](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D1%8B), а стороны параллельны осям координат и расположены по обе стороны от них на расстояниях, равных амплитудам колебаний.

СЛОЖЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВДОЛЬ ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ.

*Сложение гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой.*

Рассмотрим сложение одинаково направленных колебаний одного периода, но отличающихся начальной фазой и амплитудой. Уравнения складываемых колебаний заданы в следующем виде:

X1=A1sin(wt+ф1),

X2=A2sin(wt+ф2),

Где x1  и x2 - смещения; A1 и A2  - амплитуды;ф1 и ф2 - начальные фазы складываемых колебаний. Амплитуду результирующего колебания удобно определить с помощью векторной диаграммы (рис. 7.5), на которой отложены векторы амплитуд A1(~) и A2(~) складываемых колебаний под углами ф1  и ф2 к оси х и по правилу параллелограмма получен вектор амплитуды суммарного колебания A(~)  . Если равномерно вращать систему векторов (параллелограмм) и проектировать векторы на ось OY, то их проекции будут совершать гармонические колебания в соответствии с заданными уравнениями. Взаимное расположение векторов A1(~)  , и A2(~) при этом остается неизменным, поэтому колебательное движение проекции результирующего вектора A(~)тоже будет гармоническим.

Отсюда следует вывод, что суммарное движение - гармоническое колебание, имеющее заданную циклическую частоту. Определим модуль амплитуды А результирующего колебания В (дельта)OOK1 угол OK1K=[П-(ф2-ф1)] (из равенства противоположных углов параллелограмма).

Следовательно  
2(ф2-ф1)+2**α=2П**  
  
отсюда

.**α=[П-(ф2-ф1)],**  
Согласно теореме косинусов  
A^2=(A1^2)+(A2^2)-2A1A2cos[П-(ф2-ф1)]   
или

(A^2)=(A1^2)+(A2^2)-2A1A2cos(ф2-ф1)

Начальная фаза ф0  результирующего колебания определяется из (дельта)OKD  :  
lgф0=(KD)/(OD)=(KC+CD)/(OE+ED)=(A2sinф2+A1sinф1)/(A2sinф2+A1sinф1)

Соотношения для фазы и амплитуды позволяют найти амплитуду и начальную фазу результирующего движения и составить его уравнение

*X=Asin(wt+ф)*   
*БИЕНИЯ.*

Рассмотрим случай, когда частоты двух складываемых колебаний мало отличаются друг от друга w2-w1=(дельта)w  , и пусть амплитуды одинаковы и начальные фазы ф0=0  , т.е. x1=Asin(w1t), x2=Asin(w2t) Сложим эти уравнения аналитически

X=x1+x2=A[cos(w1t)+cos(w2t)]=2A[cos((w1t+w2t)/2)cos((w2t-w1t)/2)]=2Acos(((дельта)wt)/2)cos((w1t+w2t)/2)   
  
Преобразуем

(w1t+w2t)/2=((w1t+w2t)+(w1t-w2t))/2=(((2w1t)/2)+((w1-w2)/w))\*t=w1t+(((дельта)w)/w)\*t=(w1+(((дельта)w1)/2)\*t≅w1t  
Тогда  
x=2Acos(((дельта)wt)/2)cos(w1t)

Так как ((дельта)wt)/2  все же медленно изменяется, величину 2Acos(((дельта)wt)/2)  нельзя назвать амплитудой в полном смысле этого слова (амплитуда величина постоянная). Условно эту величину можно назвать переменной амплитудой. График таких колебаний показан на рис. 1.6 Складываемые колебания имеют одинаковые амплитуды, но различны периоды, при этом периоды T1 и T2  отличаются незначительно друг от друга. При сложении таких колебаний наблюдаются биения. Число n биений в секунду определяется разностью частот складываемых колебаний, т.е.

N=v1v2

Биения можно наблюдать при звучании двух камертонов, если частоты и колебаний близки друг к другу.